Dual de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème : $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})^*$, $A \mapsto f_A$ où $f_A : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $X \mapsto tr(AX)$ est un isomorphisme.

- $\forall A \in M_n(\mathbb{K})$, $f_A \in M_n(\mathbb{K})^*$ par linéarité de la trace / propriétés du produit mat.
- f est linéaire car $f(\lambda A + B) = f_{\lambda A + B} : X \mapsto tr((\lambda A + B)X) = \lambda tr(AX) + tr(BX)$
  $= \lambda f_A + f_B = \lambda f(A) + f(B)$.
- $M_n(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})^*$ ont même dimension (si (E_{ij}) base, (E_{ij}^*) base duale).
- Si $f_A = 0$, alors $\forall i,j$, $tr(AE_{ij}) = a_{j,i} = 0$ donc $A = 0$. D'où l'injectivité puis le résultat par égalité des dimensions

Corollaire : Si $g \in M_n(\mathbb{K})^*$, $\forall X, Y \in M_n(\mathbb{K})$, $g(XY) = g(YX)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $g = \lambda tr$

Par ce qui précède, $\exists A \in M_n(\mathbb{K})$, $g(X) = tr(AX)$
Donc $\forall X, Y$, $tr(AXY) = tr(AYX) = tr(XAY)$ donc $tr((AX - XA)Y) = 0$
Par injectivité, $\forall X$, $AX = XA$, donc A est une homothétie.

Corollaire : Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$ si $n \geq 2$.

Soit H hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$. Soit $\varphi \in M_n(\mathbb{K})^*$, $\ker \varphi = H$. $\exists A \in M_n(\mathbb{K})$, $\varphi = tr(A\cdot) = f_A$.
On cherche $X \in GL_n(\mathbb{K})$, $\varphi(X) = 0$. Soit $r = rg(A)$, $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\exists P, Q$, $A = PJ_rQ$.
On a : $tr(AX) = tr(PJ_rQX) = tr(J_rQXP)$. Il suffit donc de trouver $Y \in GL_n$ tq $tr(J_rY) = 0$.

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ convient.

Corollaire : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. LASSE :
$$\begin{cases} \exists X \in M_n(\mathbb{K}),\ AX + XA = B & (i) \\ \forall C \in M_n(\mathbb{K}),\ AC + CA = 0 \Rightarrow tr(BC) = 0 & (ii). \end{cases}$$

Soit $h : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$, $X \mapsto AX + XA$.
$(i) \Leftrightarrow B \in \operatorname{Im} h$
$(ii) \Leftrightarrow \forall C \in \ker H, tr(BC) = 0 \Leftrightarrow B \in f(\ker h)^\circ$ orthogonal dual

Or $\dim f(\ker h)^\circ = n^2 - \dim f(\ker h) = rg\, h$.
Donc il suffit de montrer que $\operatorname{Im} H \subset f(\ker h)^\circ$
Soit $D = AY + YA \in \operatorname{Im} h$
$\forall C \in \ker h$, $f_C(D) = tr(C(AY + YA)) = tr(CAY) + tr(ACY) = tr((AC + CA)Y) = 0$
Donc $\operatorname{Im} h \subset f(\ker h)^\circ$ et par égalité des dimensions, $(i) \Leftrightarrow (ii)$.